Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 2

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

26 de marzo de 2023

1. Calcular la transformación más general que deja ψ invariante.

Sea M una transformación de simetría sobre el campo de Dirac. En el capítulo 2, Javier demuestra que la condición de simetría es

$$[M, \gamma^\mu] = 0, \qquad \forall \mu$$

Vamos a resolver este ejercicio de dos formas distintas, para la primera vamos a considerar una matriz general M y usaremos la representación de Dirac (ver fórmula 41.5 del formulario de TCC)

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Imponiendo $\left[M, \gamma^0\right]$ obtenemos;

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \left[M, \gamma^0\right] = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si añadimos la condición $\left[M, \gamma^1\right]$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[M, \gamma^1\right] = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{10} \\ 0 & 0 & a_{01} & a_{00} \end{pmatrix}$$

Haciendo lo mismo con las dos matrices que quedan:

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[M, \gamma^2\right] = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{00} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[M, \gamma^3\right] = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{00} \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz M más general es proporcional a la identidad. Para que M deje el Lagrangiano invariante debemos imponer que $\alpha = e^{i\theta}$.

La segunda manera de demostrarlo es usando la siguiente propiedad; cualquier matriz compleja de 4×4 se puede escribir como

$$M = a\mathbb{1} + b_\alpha \gamma^\alpha + c_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta\gamma}\gamma^{\alpha\beta\gamma} + e_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

con c, d y e completamente antisimétricos y las siguientes definiciones:

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)$$

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]} = \frac{1}{6}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - \gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda + \gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu + \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu\right) = -i\varepsilon^{\mu\nu\lambda}{}_\alpha\gamma^\alpha\gamma^5$$

$$\gamma^{\mu\nu\lambda\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^{\rho]} = i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^5$$

De forma que la condición $[M, \gamma^\mu] = 0$ se reduce a calcular los siguientes 5 conmutadores;

$$[\mathbb{1}, \gamma^\mu] = 0$$

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\mu] = 2\gamma^{\alpha\mu}$$

$$\left[\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu\right] = 2\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2\eta^{\mu\alpha}\gamma^\beta$$

$$\left[\gamma^{\alpha\beta\gamma}, \gamma^\mu\right] = -i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{}_\nu\left[\gamma^\nu\gamma^5, \gamma^\mu\right] = 2i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\gamma^5 = 2\gamma^{\alpha\beta\gamma\mu}$$

$$\left[\gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}, \gamma^\mu\right] = i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\gamma^5, \gamma^\mu\right] = -2i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\mu\gamma^5 = \frac{1}{3}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^\mu{}_{\rho\nu\lambda}\gamma^{\rho\nu\lambda}$$

Por lo que el conmutador $[M, \gamma^\mu]$ se puede escribir como

$$0 = [M, \gamma^\mu] = 4\eta^{\mu\beta}c_{\alpha\beta}\gamma^\alpha + b_\alpha\gamma^{\alpha\mu} - 8e_{0123}\varepsilon^\mu{}_{\rho\nu\lambda}\gamma^{\rho\nu\lambda} + 2d_{\alpha\beta\gamma}\gamma^{\alpha\beta\gamma\mu}$$

Y, como las matrices γ son linealmente independientes, esto implica que todos los coeficientes b, c, d y e son cero. Es decir que $[M, \gamma^\mu] = 0$ implica

$$M = a\mathbb{1}$$